1. Ley de probabilidad total y Teorema de Bayes

Definición: Sea un entero positivo k y los conjuntos B_1, B_2, ..., B_k que satisfacen:

1. $S = B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_k$
2. $B_i \cap B_j = \emptyset$ para $i \neq j$

De esta manera, se dice que la colección de conjuntos $B_1, B_2, ..., B_k$ es una partición de S.

Teorema de Bayes: Si $B_1, B_2, ..., B_k$ constituye una partición de S tal que $P(B_i) > 0$, para $i = 1, ..., k$. Entonces

$$P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j)P(B_j)}{\sum_{i=1}^{k} P(A|B_i)P(B_i)}.$$

Ejemplo. Una población consta de 40 % de republicanos y 60 % de demócratas. Se informa que 30 % de los republicanos y el 70 % de los demócratas están a favor de un decreto electoral. Una persona de la población elegida aleatoriamente esta a favor del decreto. ¿Cuál es la probabilidad de que sea demócrata?

Solución.
Definamos los eventos de interés. Sea R el evento que una persona sea republicana, D que sea democráta, F que este a favor del decreto y C que este en contra del decreto. Es importante notar que $D \cup R = S$ y $F \cup C = S$, donde S es el total de la población, que para este ejercicio será el conjunto universal.

Como datos tenemos que $P(R) = 0{,}4$, $P(D) = 0{,}6$, $P(F|R) = 0{,}3$ y $P(F|D) = 0{,}7$. Queremos buscar $P(D|F)$, y para ello utilizaremos el teorema de Bayes

$$\begin{aligned} P(D|F) &= \frac{P(F|D)P(D)}{P(F|D)P(D) + P(F|R)P(R)} = \frac{0{,}7 \,\mathrm{x}\, 0{,}6}{0{,}7 \,\mathrm{x}\, 0{,}6 + 0{,}3 \,\mathrm{x}\, 0{,}4} \\ &= \frac{0{,}42}{0{,}42 + 0{,}12} = 0{,}7778. \end{aligned}$$

Ejemplo. Se observa que hombres y mujeres reaccionan de forma distinta a un conjunto de circunstancias; 70 % de las mujeres lo hace positivamente, mientras que sólo el 40 % de los hombres lo hace. Se sometió a estas circunstancias a un grupo de 20 personas; 15 mujeres y 5 hombres, y se pidió a los individuos que describieran sus reacciones en un cuestrionario. Una de las 20 respuestas tomada al azar resultó negativa. ¿Cuál es la probabilidad de que la respuesta sea de un hombre?

Solución.
Definamos los eventos de interés. Sea H el evento que una persona sea hombre, M que sea mujer, P que responda positivamente y N que responda negativamente. Es importante notar que $H \cup M = S$ y $P \cup N = S$, donde S es el total de encuestados, que para este ejercicio será el conjunto universal.

Tenemos como datos que $P(P|M) = 0{,}7$, $P(P|H) = 0{,}4$. Dada la cantidad de encuestados, $P(M) = 15/20 = 0{,}75$ y $P(H) = 5/20 = 0{,}25$. Queremos encontrar $P(H|N)$.

Es claro, por el teorema de Bayes que:

$$P(H|N) = \frac{P(N|H)P(H)}{P(N|H)P(H) + P(N|M)P(M)}$$

Es importante notar, que los datos que tenemos son de respuestas positivas, y el teorema nos pide usar las probalidades con respuestas negativas, pero se sabe que:

$$P(N|H) + P(P|H) = 1 \Rightarrow P(N|H) = 0{,}6.$$

y

$$P(N|M) + P(P|M) = 1 \Rightarrow P(N|M) = 0{,}3.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} P(H|N) = \frac{P(N|H)P(H)}{P(N|H)P(H) + P(N|M)P(M)} &= \frac{0{,}6 \,\mathrm{x}\, 0{,}25}{0{,}6 \,\mathrm{x}\, 0{,}25 + 0{,}3 \,\mathrm{x}\, 0{,}75} \\ &= \frac{0{,}15}{0{,}15 + 0{,}225} = 0{,}4. \end{aligned}$$